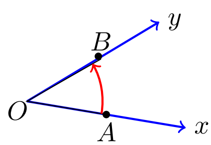
فصل ۶
مثلثات

بجرأت می توان گفت که مثلثات، حجم عظیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال را بر عهده دارد. منشاء این مبحث اخترشناسی و محاسبات نجومی است چنانکه کهن ترین جداول نجومی بر پایهٔ مثلثات، به ابرخس و منلائوس در سده دوم میلادی بر می گردد. سه دهه بعد ریاضیدانی هندی سینوس را تعریف نمود و خوارزمی نخستین جداول سینوسی را تنظیم کرد و پس از او ریاضیدانان ایرانی گامهایی در جهت تکمیل این جداول و گسترش مفاهیم مثلثاتی برداشتند. ریاضیدانان مسلمان نقش عمده‌ای در پیشبرد مثلثات ایفا نمودند و این بحث اکنون از مباحث پایهٔ ریاضیات است.

۱.۶ زاویه

۱.۱.۶ زاویه‌واجزاء آن

زاویه از دوران یک نیمخط بدست می آید. نیمخط Ox و نقطهٔ A روی آن را در نظر بگیرید. اگر نیمخط Ox حول O چنان گردش کند که نقطهٔ A بتواند بر نقطه‌ای مانند B منطبق شود گوئیم زاویهٔ $\angle AOB$ بدست آمده است. نقطهء O را رأس زاویه $\angle AOB$ نامیده و چنانچه نیمخط Ox حول O چنان گردش کند که بر خودش منطبق گردد این زاویه را یک دورکامل گوئیم. یک دورکامل را می توان سه گونه تقسیم بندی نمود: تقسیم به درجه، تقسیم به گراد و تقسیمات رادیان.



$$\theta = \angle AOB$$

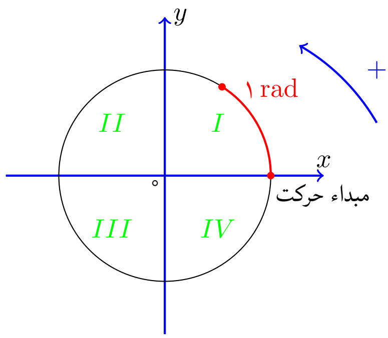
شکل ۱.۶: زاویه ازگردش نیمخط حول یک نقطه حاصل می شود.

درجه زاویه ای است که از دوران یک نیمخط حول راس باندازه $\frac{۱}{۳۶۰}$ یک دوران کامل بدست آید و آنرا با $(^\circ)$ نشان می دهیم. اجزای درجه عبارتند از دقیقه $(')$ که یک $\frac{۱}{۶۰}$ درجه و ثانیه $('')$ که $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه یا $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه است و برای مثال می نویسیم $\angle AOB = ۲۳^\circ ۴۵' ۵۶''$.

گراد زاویه ای است که از دوران یک نیمخط حول راس باندازه $\frac{۱}{۴۰۰}$ یک دوران کامل بدست آید و آنرا با grad نشان می دهیم. اجزای گراد عبارتند از دسی‌گراد ($\frac{۱}{۱۰}$ گراد)، سانتیگراد ($\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد) و میلیگراد ($\frac{۱}{۱۰۰۰}$

گراد) و می نویسیم $\angle AOB = ۲۳/۵۴۷۸\,\text{grad}$.

رادیان زاویه ای است که از دوران شعاع دایره بدور مرکز آن بدست می آید، بطوریکه اندازهٔ کمان حاصل مساوی شعاع دایره باشد. رادیان مستقل از شعاع بوده و به اندازهٔ آن بستگی ندارد.



شکل ۲.۶: رادیان کمانی از دایره به اندازه شعاع است.

۲.۱.۶ دایره‌مثلثاتی

دایرهٔ مثلثاتی دایره ای است که مرکزش منطبق بر مرکز مختصات بوده و دارای شعاع واحد و جهت مفروض می باشد. جهت مثبت روی دایره مثلثاتی در خلاف جهت گردش عقربه های ساعت فرض شده و جهت منفی در جهت چرخش عقربه های ساعت است. مبداء حرکت روی دایره، نقطهء $(۱, ۰)$ است. دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ مختصات را به چهار ربع تقسیم می کند، ربع اول I، ربع دوم II، ربع سوم III و ربع چهارم IV که در شکل۲.۶ دیده می شود.

۳.۱.۶ تقسیمات‌زاویه

زاویه ای که رأس آن بر مرکز دایره مثلثاتی واقع باشد از دایره کمانی جدا می کند که اندازهء آن برابر همان زاویه است.

عموماً دایرهٔ مثلثاتی سه گونه تقسیم می شود:

الف) دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم نموده و هر قسمت را یک درجه گوئیم و با D نشان می دهیم. لذا دایره ۳۶۰ درجه است.

ب) دایره را ۴۰۰ قسمت کرده و هر قسمت را یک گراد گوئیم و آنرا با G نشان می دهیم. یعنی دایره ۴۰۰ گراد است.

ج) از روی دایره به اندازهٔ شعاع جدا می کنیم و هر قسمت را یک رادیان گوئیم و آنرا با R نشان می دهیم. از آنجا که محیط دایره مثلثاتی ۲π است پس محیط هر دایره ۲π رادیان است (چیزی حدود ۶/۳ رادیان).

رابطهٔ بین تقسیمات یک زاویه چنین است:

$$\frac{\text{مقدار زاویه}}{\text{یک دور کامل}} = \frac{D}{۳۶۰} = \frac{G}{۴۰۰} = \frac{R}{۲\pi}$$

یا بطور خلاصه رابطهٔ بین تقسیمات یک زاویه عبارت می شود از

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi} \qquad (۱.۶)$$

مثال ۱.۱.۶. مقدار ۳۰ درجه چند گراد و چند رادیان است؟
حل. با استفاده از فرمول (۱.۶) و با جایگذاری ۳۰ بجای D می نویسیم

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$
$$\frac{۳۰}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$
$$\frac{۱}{۶} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۶} = \frac{G}{۲۰۰} & \Rightarrow \quad G = \frac{۱۰۰}{۳}\,\text{grad}, \\ \frac{۱}{۶} = \frac{R}{\pi} & \Rightarrow \quad R = \frac{\pi}{۶}\,\text{rad}. \end{cases}$$

■

هر دو نقطهٔ متمایز روی یک دایره، محیط آنرا به دو کمان تقسیم می نماید که به آنها کمانهای جهتدار مثلثاتی گوئیم. هر کمان جهتدار مثلثاتی روی دایره، روبروی یک زاویهٔ اصلی است. اگر جهت کمان، مخالف جهت عقربه‌های ساعت باشد زاویه اصلی را مثبت و گرنه آنرا منفی می گیریم.

اگر از مبدأ دایرهٔ مثلثاتی شروع به گردش در جهت مثبت کنیم، با کسر تعداد دوران، مقدار زاویهٔ اصلی بدست می‌آید. برای مثال زاویهٔ ۱۰۰۰° را می توان بصورت $۲۸۰^\circ + ۳۶۰^\circ \times ۲$ درجه نوشت. مقدار ۲۸۰ که از ۳۶۰ (یعنی یکدور کامل) کمتر است، زاویهٔ اصلی بشمار می‌رود. در حالت کلی پس از n دور گردش زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی، بر حسب واحدهای مختلف می توان چنین نوشت:

$$n \times ۳۶۰^\circ + \alpha^\circ \quad , \quad n \times ۴۰۰ + \beta_{\text{grad}} \quad , \quad n \times ۲\pi + \gamma_{\text{rad}}$$

و انتهای کمان $\gamma_{\text{rad}} = \beta_{\text{grad}} = \alpha^\circ$ بالاخره در یکی از ربع ها قرار خواهد گرفت. برای مثال $۲۳۵۰^\circ = ۱۹۰^\circ + ۶ \times ۳۶۰^\circ$ دارای زاویهٔ اصلی ۱۹۰° بوده و پس از طی شش دور کامل، انتهای کمان در ربع سوم واقع می شود. همچنین برای زاویهٔ $۱۷۳۰_{\text{grad}} = ۴ \times ۴۰۰_{\text{grad}} + ۱۳۰_{\text{grad}}$ مقدار زاویهٔ اصلی ۱۳۰_{grad} بوده و با طی ۴ دور کامل، انتهای کمان در ربع دوم قرار می گیرد.

تمرین ۲.۶. .

۱. مقدار ۱۰۰ گراد چند درجه و چند رادیان است؟

۲. $\frac{\pi}{۴}$ رادیان چند گراد و چند درجه است؟

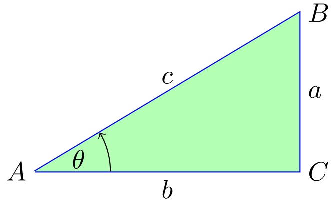
۳. زاویهٔ ۱۱۱۰ درجه را بر حسب رادیان و گراد بیان کنید و سپس آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۴. مقدار ۹۵۰ گراد چند درجه و چند رادیان است؟ آنرا روی دایره مثلثاتی مشخص کنید.

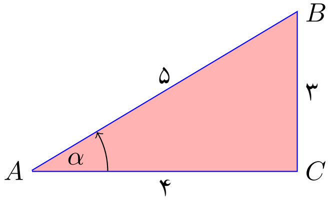
۵. زاویهٔ $\frac{۱۰\pi}{۳}$ رادیان را بر حسب درجه و گراد بدست آورده و آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۶. انتهای کمان های زیر درکدام ربع از دایره مثلثاتی هستند؟

$$\alpha = ۱۴۰۰^\circ,\quad \beta = ۲۳۶۵D,\quad \gamma = ۶۶۶۶_{\text{grad}},\quad \delta = ۳۲/۲۵\pi,\quad \epsilon = ۲۵۱\pi - \frac{۲\pi}{۳}$$



شکل ۳.۶: مثلث قائم الزاویه $C = ۹۰^\circ$.



شکل ۴.۶: نسبت های مثلثاتی در مثلثی قائم الزاویه به اضلاع ۳ و ۴ و ۵.

۳.۶ نسبتهای مثلثاتی

در مثلثات شش نسبت قابل تعریف است که از بین آنها دو نسبت سینوس sin و کسینوس cos نسبتهای اصلی و نسبتهای تانژانت tan، کتانژانت cot، سکانت sec و کسکانت csc وابسته و بر اساس دو نسبت اصلی تعریف می گردند. در ابتدا نسبتهای سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت توضیح داده می شوند و سپس روابط بین آنها را بیان خواهیم کرد.

۱.۳.۶ نسبتهای چهارگانه

مثلث قائم الزاویهٔ مفروضی را با اضلاع a, b, c و زاویهٔ $\angle BAC = \theta$ در نظر بگیرید (شکل ۳.۶). نسبتهای چهارگانه را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$\cos\theta = \frac{b}{c}$ ضلع مجاور به وتر $\quad$ $\sin\theta = \frac{a}{c}$ ضلع مقابل به وتر

$\cot\theta = \frac{b}{a}$ ضلع مجاور به مقابل $\quad$ $\tan\theta = \frac{a}{b}$ ضلع مقابل به مجاور

مثال ۱.۳.۶. در مثلث شکل ۴.۶ نسبتهای چهارگانه زاویهء α چنین هستند:

$$\sin\alpha = \frac{۳}{۵} \;,\; \cos\alpha = \frac{۴}{۵} \;,\; \tan\alpha = \frac{۳}{۴} \;,\; \cot\alpha = \frac{۴}{۳}$$

با استفاده از روشهائی ساده، مقادیر نسبتهای مثلثاتی را می توان بدست آورد که ما آنها را در جدول زیر ذکر می کنیم. قابل ذکر است که تمامی مقادیر عددی زوایای بکار رفته در این فصل بر حسب درجه هستند.

جدول ۱.۶: نسبتهای مثلثاتی زوایای مهم

زاویه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
cot	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

منظور از عبارت مثلثاتی، ترکیب نسبتهای مثلثاتی با چهار عمل اصلی بهمراه رادیکال و توان است. مانند عبارات جبری که از متغیرها تشکیل می شد عبارت مثلثاتی از نسبتهای مثلثاتی تشکیل می شود. توضیح اینکه بجای قراردادن توان روی نسبت مثلثاتی، مرسوم است که توان را بین نسبت مثلثاتی و زاویه قرار می دهند، برای مثال بجای $(\cos ۳۰)^۲$ می نویسیم $\cos^۲ ۳۰$. مطلب دیگر اینکه زوایای بکار رفته در ادامه موضوع، بر حسب درجه خواهند بود که برای سادگی نگارش از تکرار آن جلوگیری می کنیم.

مثال ۲.۳.۶. با استفاده از مقادیر جدول ۱.۶، مقدار عبارات مثلثاتی زیر را حساب کنید.

$$(a)\ \ ۲\sin ۴۵^\circ + ۴[\cos ۳۰^\circ]^۲,\quad (b)\quad \tan ۳۰^\circ \sin ۶۰^\circ - [\sin ۳۰^\circ]^۲$$

حل. جواب چنین است:

$$(a)\quad ۲\sin ۴۵ + ۴\cos^۲ ۳۰ = ۲\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ = \sqrt{۲} + ۴(\frac{۳}{۴}) = \sqrt{۲} + ۳$$

$$(b)\quad \tan ۳۰ \sin ۶۰ - \sin^۲ ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

■

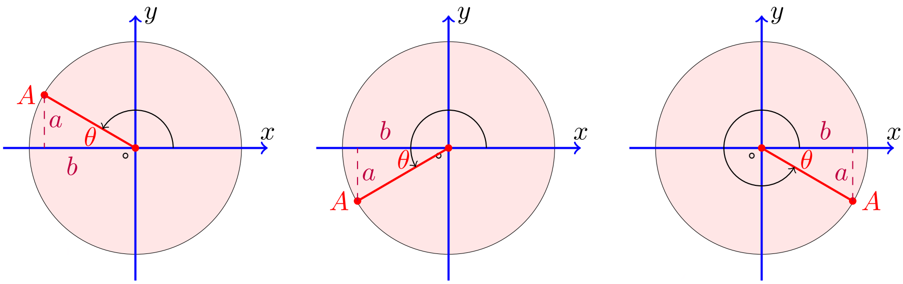
اگر انتهای کمان در ربع اول باشد از جدول فوق مقادیر را محاسبه می کنیم. دقت کنید که علامت همهٔ نسبتها مثبت باشد. برای سایر ربع ها، نسبتهای مثلثاتی دارای علامات مختلفی اند که در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

جدول ۲.۶: علامت نسبتهای مثلثاتی در ربع های مختلف.

ربع	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

در جدول ۲.۶، علامت نسبتهای مثلثاتی در سایر ربع ها بدست آمده که توسط اشکال زیر حاصل شده اند:

جدول ۳.۶: نسبت های مثلثاتی در سایر ربع ها.



ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$a > ۰, b < ۰$	$a < ۰, b < ۰$	$a < ۰, b > ۰$
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(۲\pi - \theta) = -\sin\theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(۲\pi - \theta) = \cos\theta$
$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$	$\tan(۲\pi - \theta) = -\tan\theta$
$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$	$\cot(۲\pi - \theta) = -\cot\theta$

مثال ۳.۳.۶. مقدار عبارت $\sin ۲۴۰ \cos ۳۳۰$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}
\sin ۲۴۰ \cos ۳۳۰ &= \sin(۱۸۰ + ۶۰)\cos(۳۶۰ - ۳۰) \\
&= -\sin ۶۰ \cos ۳۰ \\
&= -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\
&= -\frac{۳}{۴}
\end{aligned}$$

■

مثال ۴.۳.۶. مقدار عبارت $\dfrac{\sin ۲۱۰}{\cos ۳۰۰ + \tan ۲۲۵}$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin ۲۱۰}{\cos ۳۰۰ + \tan ۲۲۵} &= \frac{\sin(۱۸۰ + ۳۰)}{\cos(۳۶۰ - ۶۰) + \tan(۱۸۰ + ۴۵)} \\
&= \frac{-\sin ۳۰}{+\cos ۶۰ + \tan ۴۵} \\
&= \frac{-\frac{۱}{۲}}{+\frac{۱}{۲} + ۱} \\
&= -\frac{۱}{۳}
\end{aligned}$$

■

برای زوایای بزرگتر از یکدور کامل، ابتدا زاویه اصلی را بدست آورده و سپس مطابق ذیل رفتار می کنیم:

$$\begin{aligned}
\sin(n \times ۳۶۰ + \theta) = \sin(۲\pi n + \theta) = \sin\theta \\
\cos(n \times ۳۶۰ + \theta) = \cos(۲\pi n + \theta) = \cos\theta \\
\tan(n \times ۳۶۰ + \theta) = \tan(۲\pi n + \theta) = \tan\theta \\
\cot(n \times ۳۶۰ + \theta) = \cot(۲\pi n + \theta) = \cot\theta
\end{aligned}$$

که n تعداد دورهای کامل است. همچنین برای زوایای منفی که در ربع چهارم واقع می شوند نسبت ها چنینند:

$$\begin{aligned}
\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\cot(-\theta) &= -\cot\theta
\end{aligned}$$

مثال ۵.۳.۶. مقدار عبارت $\tan ۱۳۲۰^\circ + ۲\cos ۱۵۹۰^\circ$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}
\tan(۳ \times ۳۶۰ + ۲۴۰) &+ ۲\cos(۴ \times ۳۶۰ + ۱۵۰) \\
&= \tan(۱۸۰ + ۶۰) + ۲\cos(۱۸۰ - ۳۰) \\
&= \tan ۶۰ - ۲\cos ۳۰ \\
&= \sqrt{۳} - ۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\
&= \sqrt{۳} - \sqrt{۳} \\
&= ۰
\end{aligned}$$

■

مثال ۶.۳.۶. مقدار حاصل از $\sin(\theta-5\pi)$ چیست؟

حل.

$$\begin{aligned}\sin(\theta-5\pi) &= -\sin(5\pi-\theta)\\ &= -\sin(4\pi+\pi-\theta)\\ &= -\sin(\pi-\theta)\\ &= -\sin\theta\end{aligned}$$

■

تمرین ۴.۶. حاصل هر کدام از عبارات مثلثاتی زیر را بیابید. زوایای ذکر شده برحسب درجه‌اند.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \sin 45\cos 30+\sin 30\cos 45 & ,\ (b) & 4\sin 60\cos 30+(6\tan 30)^2\\
(c) & 4\sin 210\tan 150+\cot 210 & ,\ (d) & (1+\tan^2 240)\cos^2 150\\
(e) & \dfrac{3\sin 150+\cos 240}{2\cot 135-\tan 315} & ,\ (f) & \dfrac{\cos 240+2\sin 330}{\sin 120+\cos 330}\\
(g) & 8\sin 2745-2\cos 4455 & ,\ (h) & 2\tan 2265-\cot 3885-\cos 2595\\
(i) & \dfrac{8\sin 2295+2\cos 4635}{6\sin 3270-4\tan 1305} & ,\ (j) & \dfrac{\tan(1830)-\cos(-2400)}{\sin(-1290)+\tan(-1410)}
\end{array}$$

۱.۴.۶ روابط مثلثاتی

از آنجا که نسبتهای مثلثاتی طبق روابطی بین اضلاع a و b و c از یک مثلث قائم الزاویه تعریف شد (بخش۳.۶)، این نسبتها متقابلاً با هم روابطی دارند. مثلاً دیدیم که $\tan\theta=\frac{a}{b}$ و $\cot\theta=\frac{b}{a}$ و بنابراین

$$\tan\theta.\cot\theta=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$$

خواهد بود. چنین روابطی را می توان برای هر زاویهٔ دلخواه بین مقادیر نسبتهای چهارگانه بدست آورد. روابط اصلی بین نسبتهای مثلثاتی روی زاویهٔ x بصورت زیر است:

$$\begin{array}{lll}
\sin^2 x+\cos^2 x=1 & ,\ \sin^2 x=1-\cos^2 x & ,\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\\
\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x} & ,\ \tan x=\dfrac{1}{\cot x} & ,\ 1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\\
\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x} & ,\ \cot x=\dfrac{1}{\tan x} & ,\ 1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}\\
\tan x.\cot x=1 & ,\ \sec x=\dfrac{1}{\cos x} & ,\ \csc x=\dfrac{1}{\sin x}\\
\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x} & ,\ \sin x=\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & ,\ \sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}\\
\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x} & ,\ \cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & ,\ \cos x=\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}
\end{array}$$

هرگاه یک عبارت مثلثاتی بازای جمیع مقادیری که بجای متغیر آن گذاشته می شود، برقرار شود آن عبارت را اتحاد مثلثاتی نامیم. عبارات مثلثاتی بالا همگی اتحادهای مثلثاتی اند که ارتباط بین نسبت ها را بیان می کنند. با استفاده از این ارتباط می توان با داشتن یکی از نسبتها، سایر نسبتها را یافت و در این موضوع، تنها دانستن انتهای کمان کافی است.

مثال ۱.۴.۶. اگر $\sin x = \frac{-۴}{۵}$ و انتهای کمان در ربع سوم باشد، مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

حل. در ربع سوم $\cos$ منفی و $\tan$ و $\cot$ مثبت خواهند بود. با استفاده از روابط بین نسبتها می نویسیم

$$\cos x = -\sqrt{۱ - \sin^۲ x} = -\sqrt{۱ - (\frac{-۴}{۵})^۲} = -\sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۳}{۵}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$$

$$\cot x = \frac{۱}{\tan x} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

■

مثال ۲.۴.۶. عبارت $\sin x(\tan x + \cot x)$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
\sin x(\tan x + \cot x) &= \sin x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) \\
&= \sin x\left(\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos x \sin x}\right) \\
&= \sin x\left(\frac{۱}{\cos x \sin x}\right) \\
&= \frac{۱}{\cos x}
\end{aligned}$$

بنابراین $\sin x(\tan x + \cot x) = \sec x$. ■

مثال ۳.۴.۶. عبارت $\sin^۲ x \cos^۲ x(۲ + \tan^۲ x + \cot^۲ x)$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
\sin^۲ x \cos^۲ x(۲ + \tan^۲ x + \cot^۲ x) &= \sin^۲ x \cos^۲ x(۱ + \tan^۲ x + ۱ + \cot^۲ x) \\
&= \sin^۲ x \cos^۲ x\left(\frac{۱}{\cos^۲ x} + \frac{۱}{\sin^۲ x}\right) \\
&= \sin^۲ x \cos^۲ x\left(\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos^۲ x \sin^۲ x}\right) \\
&= \sin^۲ x \cos^۲ x\left(\frac{۱}{\cos^۲ x \sin^۲ x}\right) \\
&= ۱
\end{aligned}$$

پس $\sin^2 x \cos^2 x(2 + \tan^2 x + \cot^2 x) = 1$ خواهد بود. ■

تمرین ۵.۶. .

۱. اگر $\cos x = -\frac{1}{4}$ و انتهای کمان در ربع دوم باشد، مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

۲. اگر $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان در ربع چهارم باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x را بیابید.

۳. عبارات مثلثاتی زیر را ساده کنید.

$$(a)\quad (\cos\theta.\tan\theta)^2 + (\sin\theta.\cot\theta)^2 \quad , \quad (b)\quad \frac{(1+\tan x)(1-\cot x)}{(1+\cot x)(1-\tan x)}$$

$$(c)\quad \frac{\tan x}{\sin x\cos^2 x(1+\tan^2 x)} \quad , \quad (d)\quad \left(\frac{\sin\theta}{\tan\theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)^2$$

$$(e)\quad \frac{\sin^2 x - \cos^2 x - 1}{\cot^2 x} \quad , \quad (f)\quad \frac{\sin t}{1+\cos t} + \frac{1+\cos t}{\sin t}$$

۱.۵.۶ نسبتهای مثلثاتی مجموع دوزاویه

مقادیر نسبتهای مجموع و تفاضل دو کمان دلخواه a و b چنین هستند:

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \quad , \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \quad , \quad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b} \quad , \quad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}$$
$$\cot(a-b) = \frac{\cot a\cot b + 1}{\cot a - \cot b} \quad , \quad \cot(a+b) = \frac{\cot a\cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

مثال ۱.۵.۶. مقدار $\sin 15^\circ$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از سینوس تفاضل دو کمان می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\sin 15 &= \sin(45-30) \\
&= \sin 45\ \cos 30 - \cos 45\ \sin 30 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

■

مثال ۲.۵.۶. مقدار $\tan 105^\circ$ را حساب کنید.
حل. با استفاده از تانژانت مجموع زوایا داریم:

$$\begin{aligned}
\tan 105 &= \tan(45+60)\\
&= \frac{\tan 45 + \tan 60}{1-\tan 45 \tan 60}\\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{1-1\times\sqrt{3}}\\
&= -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2\\
&= -2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

■

از بکارگیری فرمولهای قبل، می توان حاصلجمع، تفاضل و حاصلضرب نسبتهای مثلثاتی را برای زوایای دلخواه p و q به شکل زیر بدست آورد:

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q)+\sin(p-q)\right]$$

$$\sin p \sin q = \frac{-1}{2}\left[\cos(p+q)-\cos(p-q)\right]$$

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}\left[\cos(p+q)+\cos(p-q)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p\pm q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cot p \pm \cot q = \frac{\sin(q\pm p)}{\sin p \sin q}$$

مثال ۳.۵.۶. درستی عبارت $\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})+\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})=-\cos\alpha$ را بررسی کنید.

حل. عبارت طرف چپ را با استفاده از فرمول حاصلجمع دو کسینوس در فوق می نویسیم:

$$\begin{aligned}\text{طرف چپ} &= ۲\cos\left(\frac{\alpha+\frac{۲\pi}{۳}+\alpha+\frac{۴\pi}{۳}}{۲}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\frac{۲\pi}{۳}-\alpha-\frac{۴\pi}{۳}}{۲}\right)\\ &= ۲\cos(\alpha+\pi)\cos(-\frac{\pi}{۳})\\ &= ۲\times-\cos\alpha\times\frac{۱}{۲}\\ &= -\cos\alpha\end{aligned}$$

■

تمرین ۶.۶. .

۱. مقادیر $\tan ۷۵^\circ$، $\sin ۷۵^\circ$، $\cot ۷۵^\circ$ و $\sin ۱۰۵^\circ$ را حساب کنید.

۲. درستی عبارات مثلثاتی زیر را ثابت نمائید.

$$(a)\quad \frac{\cos ۱۱۰^\circ+\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۵^\circ}=۱ \quad,\quad (b)\quad \sin(\alpha+\frac{\pi}{۳})+\sin(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})=\sqrt{۳}\cos\alpha$$

$$(c)\quad \sin ۷۵^\circ+\sin ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶} \quad,\quad (d)\quad \tan ۷۵^\circ-\tan ۱۵^\circ=۶-۲\sqrt{۶}$$

۱.۶.۶ نسبتهای دو برابر کمان

با استفاده از فرمول مجموع دو کمان صفحهٔ قبل و قرار دادن $p=q=x$ براحتی می توان فرمول هائی برای نسبتهای دو برابر کمان یافت. این فرمول ها چنین اند:

$$\sin ۲x=۲\sin x\cos x$$

$$\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x \quad,\quad \cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱ \quad,\quad \cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$$

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$$

$$\cot ۲x=\frac{\cot^۲ x-۱}{۲\cot x}$$

و روابط مفید زیر را نیز نتیجه می گیریم:

$$\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲} \quad,\quad \cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲} \quad,\quad \tan^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}$$

همچنین سه فرمول زیر، که روابطی بر حسب تانژانت نصف کمان است را بدست می آوریم:

$$\sin x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} \quad,\quad \cos x=\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} \quad,\quad \tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}$$

مثال ۱.۶.۶. عبارت $\frac{\cos ۲a - ۱}{\sin ۲a}$ را ساده کنید.

حل. طبق cos نسبت دو برابر کمان داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\cos ۲a - ۱}{\sin ۲a} &= \frac{۱ - ۲\sin^۲ a - ۱}{\sin ۲a}\\ &= \frac{-۲\sin^۲ a}{۲\sin a\cos a}\\ &= \frac{-\sin a}{\cos a}\\ &= -\tan a\end{aligned}$$

■

مثال ۲.۶.۶. عبارت $\frac{۱ + \sin ۲x}{\sin x + \cos x}$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\frac{۱ + \sin ۲x}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}\\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^۲}{\sin x + \cos x}\\ &= \sin x + \cos x\end{aligned}$$

■

تمرین ۷.۶. عبارات مثلثاتی زیر را ساده نمائید.

$$\begin{array}{llllll}(a) & \frac{\tan ۲\theta\cos ۲\theta}{۲\sin\theta} & ,\ (b) & \frac{\sin ۲\theta + ۱}{\sin\theta + \cos\theta} & ,\ (c) & \frac{۱ + \cos\alpha + \cos ۲\alpha}{\sin\alpha + \sin ۲\alpha}\\ (d) & \sin ۷۵^\circ\cos ۱۵^\circ & ,\ (e) & \frac{\csc ۴x + \cot ۴x}{\cot x - \tan x} & ,\ (f) & \frac{\cot ۳\beta(\tan\beta - \tan ۳\beta)}{\cot\beta - \cot ۳\beta}\end{array}$$

۸.۶ معادلات مثلثاتی

هرگاه یک عبارت مثلثاتی بازای جمیع مقادیری که بجای متغیر آن گذاشته می شود، برقرار شود آن را اتحاد مثلثاتی نامیم. این اتحادها شبیه اتحادهای جبری اند برای مثال

$$۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

اکثر فرمولهای مثلثاتی بخشهای قبل اتحاد مثلثاتی بودند. اما گاهی عبارات مثلثاتی برای برخی از مقادیر درستند. تساوی دو عبارت را که شامل مقادیر نسبتهای مثلثاتی یک زاویه بوده و برابری دو طرف تساوی در ازای برخی مقادیر

این زاویه برقرار شود، معادلهٔ مثلثاتی نامیده می شود. عبارت $\sin x + ۱ = \frac{۱ + \sin ۲x}{\sin x + \cos x}$ یک معادلهٔ مثلثاتی است. می خواهیم جواب این معادله را بدست آوریم یعنی مجموعه مقادیری که معادله برای آنها درست خواهد بود. با استفاده از مثال ۲.۶.۶ طرف چپ این معادله ساده شده و داریم $\sin x + ۱ = \sin x + \cos x$ و پس از ساده کردن $\cos x = ۱$، یعنی $x = ۲k\pi$. این جواب بدین ترتیب بدست آمد که چون $\cos x = \cos ۰$ لذا $x = ۲k\pi \pm ۰$ یا $x = ۲k\pi$ و در نتیجه برای k−ی صحیح جوابها عبارتند از

$$\cdots, -۶\pi, -۴\pi, -۲\pi, ۰, ۲\pi, ۴\pi, ۶\pi, \cdots$$

و بهتر است نمایش ریاضی مجموعه جواب را بنویسیم:

$$\text{مجموعه جواب} = \{۲k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

هنگامی که نسبت دو کمان x و α برابر می‌شوند می توان رابطهٔ بین این کمان ها را بصورت زیر نوشت $(k \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
\sin x = \sin\alpha &\implies x = ۲k\pi + \alpha \ , \ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \\
\cos x = \cos\alpha &\implies x = ۲k\pi \pm \alpha \\
\tan x = \tan\alpha &\implies x = k\pi + \alpha \\
\cot x = \cot\alpha &\implies x = k\pi + \alpha
\end{aligned}$$

مثال ۱.۸.۶. معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x = \sin x$ را حل کنید.

حل. با استفاده از فرمول سینوس در فوق باید داشته باشیم

$$\begin{aligned}
۲x &= ۲k\pi + x \\
۲x &= ۲k\pi + \pi - x
\end{aligned}$$

که پس از ساده کردن جوابها عبارت اند از:

$$x = ۲k\pi, x = \frac{۲k\pi + \pi}{۳} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

و یا $\text{مجموعه جواب} = \{۲k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{۲k\pi + \pi}{۳} | k \in \mathbb{Z}\}$. ■

مثال ۲.۸.۶. مطلوبست حل معادلهٔ $\tan(۱ + \frac{x}{۲}) \tan(۱ - \frac{x}{۳}) = ۱$

حل. ابتدا معادله را بشکل زیر تغییر می دهیم:

$$\begin{aligned}
\tan(۱ + \frac{x}{۲}) &= \frac{۱}{\tan(۱ - \frac{x}{۳})} \\
&= \cot(۱ - \frac{x}{۳}) \\
&= \tan(\frac{\pi}{۲} - ۱ + \frac{x}{۳})
\end{aligned}$$

و با برابری دو کمان داریم

$$1 + \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{x}{3}$$

که پس از ساده کردن $x = 6k\pi + 3\pi - 12_{\text{rad}}$ جواب معادلهٔ مثلثاتی است. ■

تمرین ۹.۶. معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llcll}
(a) & \cos 4x = \cos x & , & (b) & \sin 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \\
(c) & 3\cot x = \tan x & , & (d) & \tan^3 x - 3\sqrt{3} = 0 \\
(e) & \tan(1+x)\tan(1-x) = -1 & , & (f) & 3(1-\sin x) = 1 + \cos 2x
\end{array}$$

۱۰.۶ معادله مثلثاتی خط

معادلهٔ خطی که از مبداء می گذرد و نقطهٔ $A(a,b)$ از آن معلوم است عبارتست از

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-0}{x-0} = \frac{b-0}{a-0} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

از طرفی $\tan\theta = \frac{b}{a}$ شیب خط بوده و لذا معادلهٔ خطی که از مبداء می گذرد بصورت $y = \tan\theta x$ خواهد شد که θ زاویهٔ خط با سمت مثبت محور طولهاست.

مثال ۱.۱۰.۶. معادلهٔ خطی را بنویسید که از مبداء مختصات گذشته و با محور $x-$ها زاویهٔ ۳۰ درجه می سازد.

حل. طبق فرمول $y = \tan(30^\circ)x$ پس $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ معادلهٔ خط مذکور خواهد بود. ■

مطلب ۱.۶: زاویهٔ بین دو خط

زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 عبارتست از $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

مثال ۲.۱۰.۶. زاویهٔ بین دو خط $y = 2x - 4$ و $x - 3y + 3 = 0$ چیست؟

حل. برای این دو خط با شیب های $m_1 = 2$ و $m_2 = \frac{1}{3}$ ازفرمول زاویهٔ بین دو خط داریم

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2 - (\frac{1}{3})}{1 + 2(\frac{1}{3})}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

که نشان می دهد زاویهٔ بین دو خط ۴۵ درجه است. ■

تمرین ۱۱.۶. **تمرینات تکمیلی.**

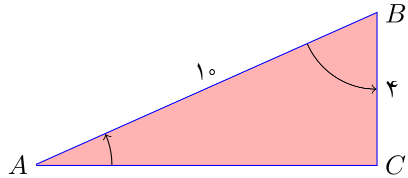
۱. مقدار 450° را بر حسب رادیان و گراد بیان کرده و آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۲. انتهای کمان های $\alpha = ۳۰۹۰^\circ$ و $\beta = \frac{۱۰۷\pi}{۴}$ در کدام ربع از دایره مثلثاتی هستند؟

۳. اگر $A = ۱۶۵۰\ \text{grad}$، $B = ۱۲۱۵^\circ$، $C = -۹۵۰\ \text{grad}$ و $D = \frac{۹۵\pi}{۴}$ باشند، انتهای کمانهای A، B، C و D را روی دایرهٔ مثلثاتی بیابید و ثابت کنید $ABCD$ یک مربع است، سپس مساحت آنرا بدست آورید.

۴. در مثلث قائم الزاویهء $\triangle ABC$ زیر مقدار عبارات خواسته شده را بیابید:

$$(a)\quad \sin A.\cot B - \tan A.\cos B \quad , \quad (b)\quad \csc^۲ B(\sin^۲ C - \tan^۲ A)$$



شکل ۵.۶: مثلث تمرین۴

۵. مجموع دو زاویه $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است در صورتی که اولی را بر حسب درجه x و دومی را بر حسب گراد y بنامیم $x = ۲y$ خواهد بود. مقدار دو زاویه را بر حسب رادیان بدست آورید.

۶. حاصل عبارات زیر را بدست آورید (زوایا برحسب درجه اند):

$$(a)\quad \frac{۴\sin ۱۵۰ - ۲\cos ۱۲۰}{۳\tan^۲ ۳۰ + \cot^۲ ۲۱۰} \quad , \quad (b)\quad \frac{۶\tan^۲ ۲۱۰ - ۲\sin ۳۳۰}{۶\cot^۲ ۲۱۰ - ۴\cos ۳۰۰}$$

$$(c)\quad \frac{۲\tan ۳۰۰ - \cot ۱۲۰}{\cos ۱۸۰ - ۴\sin^۲ ۳۰} \quad , \quad (d)\quad \frac{\tan ۲۲۵\cos ۲۷۰ - \cot ۲۲۵}{۱ - \tan^۲ ۳۰۰}$$

$$(e)\quad \frac{۱ - \tan^۲ ۲۱۰}{۱ + \tan^۲ ۲۱۰} \quad , \quad (f)\quad \frac{\sin ۱۸۶۰ + \cos ۲۵۵۰}{\tan ۱۳۸۰ - ۴\sqrt{۳}\cot ۱۱۲۵}$$

۷. مقدار $\sin ۳x$ را بر حسب $\sin x$ و $\cos ۳x$ را بر حسب $\cos x$ حساب کنید. عبارتی برای $\tan ۳x$ بر حسب $\tan x$ بیابید.

۸. در ساعت ۴ و ۴۰ دقیقه زاویهٔ عقربه های ساعت چقدر است؟

۹. در ساعت ۵ و ۱۰ دقیقه زاویهٔ بین عقربه های ساعت چقدر است؟

۱۰. اگر $\tan z = \frac{a-۱}{b}$ و $\cot z = \frac{b-۱}{a-۲}$ باشد مقدار زاویهٔ z چقدر است.

۱۱. حدود a را چنان تعیین کنید که $\sin x = ۳ - ۲a$ باشد.

۱۲. اگر $۳۰^\circ \leq \alpha \leq ۹۰^\circ$ باشد و $\cos\alpha = ۲ - ۳m$، m در چه فاصله ای تغییر می کند؟

۱۳. اگر $\cos\alpha = \dfrac{۲m-۱}{m+۱}$ باشد و انتهای کمان α در ربع دوم باشد، حدود m را تعیین کنید.

۱۴. اگر $۱۰۰_{\text{grad}} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{۶}$ و $\sin\alpha = \dfrac{۳m+۱}{m-۲}$ باشند، سپس m در چه فاصله‌ای تغییر خواهد کرد؟

۱۵. اگر $\sin ۳۶^\circ = ۰/۵۸۷۸$ و $\sin ۳۷^\circ = ۰/۶۰۱۸$ باشد مقدار $\sin(۳۶^\circ, ۲۵')$ را حساب کنید.

۱۶. اگر $\tan x = \dfrac{m+۱}{m}$ و $\cos x = \dfrac{m}{m+۲}$ مقدار m را حساب کرده و مشخص کنید که انتهای کمان x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است.

۱۷. در معادلهٔ مثلثاتی $m\sin^۲ x + (m-۱)\sin x - ۱ = ۰$
(اولاً) تعیین کنید بازای چه مقادیری از m معادله جواب دارد.
(ثانیاً) بازای $m = \sqrt{۲}$ جوابها را بیابید.

۱۸. معادلهٔ $x^۲ - (\tan\alpha + ۳\cot\alpha)x + ۳ = ۰$ را حل کنید.

۱۹. اگر در مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $\angle A = ۱۲۰^\circ$ ثابت کنید $\tan ۳B + \tan ۳C = ۰$.

۲۰. درستی روابط مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$(a)\quad \frac{۲\sin\alpha\cos ۳\alpha}{\sin ۲\alpha} = ۲\cos ۲\alpha - ۱$$

$$(b)\quad \sin^۳ a\sin ۳a + \cos^۳ a\cos ۳a = \cos^۳ ۲a$$

$$(c)\quad \sin ۱۰\sin ۳۰\sin ۵۰\sin ۷۰\sin ۹۰ = \frac{۱}{۱۶}$$

$$(d)\quad \tan x\tan(۶۰+x)\tan(۶۰-x) = \tan ۳x$$

$$(e)\quad \cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{۲\pi}{۳}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{۴\pi}{۳}\right) = ۰$$

$$(f)\quad \tan\alpha\tan ۲\alpha\tan ۳\alpha = \tan ۳\alpha - \tan ۲\alpha - \tan\alpha$$

$$(g)\quad \sin^۳ a\sin ۳a + \cos^۳ a\cos ۳a = \cos^۳ ۲a$$

$$(h)\quad ۴[\cos^۳ a\sin ۳a + \sin^۳ a\cos ۳a] = ۳\sin ۴a$$

$$(i)\quad \tan\alpha + \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{۳}\right) + \tan\left(\alpha + \frac{۲\pi}{۳}\right) = ۳\tan ۳a$$

$$(j)\quad \tan ۲۰ - \tan ۴۰ + \tan ۸۰ = ۳\sqrt{۳}$$

$$(k)\quad \sin^۴\frac{\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۳\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۵\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۷\pi}{۸} = \frac{۳}{۲}$$

$$(\ell)\quad \cos^۴\frac{\pi}{۸} + \cos^۴\frac{۳\pi}{۸} + \cos^۴\frac{۵\pi}{۸} + \cos^۴\frac{۷\pi}{۸} = \frac{۳}{۲}$$

۲۱. عبارات مثلثاتی زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \dfrac{\sin 2\alpha \cos\alpha}{1+\cos 2\alpha} & ,\ (b) & \cos 2x(1+\tan x.\tan 2x) \\
(c) & \sin 4x+\cos 4x.\cot 2x & ,\ (d) & \tan x-\sin x(1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}) \\
(e) & \sin x+\tan z\cos x & ,\ (f) & \cot 20^\circ-\cot 40^\circ+\cot 80^\circ \\
(g) & \multicolumn{3}{l}{\cos y\left(\dfrac{2}{\cos y}+\tan y\right)\left(\dfrac{1}{\cos y}-2\tan y\right)+3\tan y}
\end{array}$$

۲۲. معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \sin x+\cos x=5 & ,\ (b) & 3\cos^3 x-\cos x=0 \\
(c) & \tan(x+30^\circ)\tan(x+60^\circ)=1 & ,\ (d) & \dfrac{\sin x-\sin 2x}{\sin x+\sin 2x}=-\dfrac{1}{3} \\
(e) & \sin x+\cos x=1+2\sin x\cos x & ,\ (f) & \sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0
\end{array}$$

۲۳. معادلهٔ خطی را بنویسید که از مبداء مختصات گذشته و با محور xــها زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$ می سازد.

۲۴. معادلهٔ خطی که از مبداء مختصات عبور کرده و با محور xــها زاویهٔ ۷۵ درجه می سازد را بیابید.

۲۵. اگر $6\cos x+5=0$ و انتهای کمان در ربع دوم باشد، مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

۲۶. اگر $\sqrt{3}\cot z=-1$ و انتهای کمان در ربع چهارم باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ z را بیابید.

۲۷. اگر $\sin A=\frac{4}{5}$ و انتهای کمان A در ربع اول باشد ثابت کنید $\tan A+\dfrac{1}{\cos A}=3$.

۲۸. کدام بزرگترند $\sin 1$ یا $\sin 1^\circ$ ؟

۲۹. برای هر زاویهٔ دلخواه $x\neq k\pi$ ثابت کنید $\log|\sin x|\leq 0$.

۳۰. با استفاده از تساوی $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$ مقدار $\sin 18^\circ$ را بیابید.

۳۱. دستگاه های مثلثاتی زیر را حل نمائید.

$$(a)\left\{\begin{array}{l}\sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{4}\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.\ ,(b)\left\{\begin{array}{l}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4}\\ \tan x\tan y=3\end{array}\right.\ ,(c)\left\{\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2}\sin y\\ \tan x=\sqrt{3}\tan y\end{array}\right.$$

۳۲. رئوس یک مثلث عبارتند $A\Big|_{1}^{2}$، $B\Big|_{-1}^{-2}$ و $C\Big|_{3}^{-1}$. مطلوبست تعیین تانژانت زوایای مثلث.